ARTÍCULO INVITADO

Comprendre le travail des professeurs à travers leurs interactions avec les ressources de leur enseignement - Une histoire de trajectoires

Understanding the work of teachers through their interaction with their teaching resources -a history of trajectories

Luc Trouche[1]

Résumé: Nous voulons dans cet article, à partir d'un témoignage personnel, montrer combien les histoires technologiques, conceptuelles, professionnelles, humaines, peuvent être imbriquées, et illustrer cette imbrication à partir de la trajectoire d'une ressource. Dans la première section, nous présenterons ce témoignage personnel. Dans la deuxième section, nous présenterons le cadre conceptuel dans lequel nous situons aujourd'hui nos recherches. Dans la troisième section, nous introduirons le problème mathématique support de notre réflexion. La quatrième section sera consacrée à la mise en œuvre de ce problème dans un contexte de formation des maîtres, en France, en 2002. La cinquième section sera consacrée à l'exploitation du même problème dans le contexte d'un séminaire de recherche au Mexique en 2017. Dans une sixième section, nous mettrons en évidence les tensions de la formation des maîtres, entre «leur donner des outils pour soutenir leur travail dans les classes» et «leur donner de l'espace pour qu'ils puissent exprimer, ensemble, leur créativité». Cet article reprend, pour l'essentiel, les termes d'un séminaire proposé à l'Institut Freudenthal d'Utrecht, à l'invitation de Paul Drijvers (Trouche 2018a).

Mots clés: *Approche documentaire du didactique, créativité mathématique, formation des enseignants, instrumentation, instrumentalisation, système de ressources*

[1] Institut Français de l'éducation, Ecole Normale Supérieure de Lyon, juillet 2018

Abstract: This article shows, from a personal testimony, how the technological, conceptual, professional and human histories are intertwined and illustrate this interrelation from the trajectory of a resource. In the first section that testimony is presented. The second one exposes the conceptual framework in which our research is currently located. In the third, the mathematical problem that underlies our reflection is introduced. The fourth section is devoted to the implementation of this problem in a context of teacher training in France in 2002. The fifth section is intended to the analysis of the same problem in the context of a research seminar in Mexico in 2017. In the sixth section the tensions related to teacher training are highlighted, between "giving them tools to support their work in the classroom" and "giving them time so that, together, they can express their creativity". This article takes up, in particular, the terms of a seminar that was held at the Freudenthal Institute of Utrecht, at the invitation of Paul Drijvers (Trouche 2018A).

Keywords: *Documentational approach to didactics, mathematical creativity, teacher training, instrumentation, instrumentalization, resource system*

1. LES RAISONS MULTIPLES ET IMBRIQUÉES DES GENÈSES IDENTITAIRES

Je reprendrai ici l'idée de Pastré (2005, p. 231) d'un «pôle dans l'organisation de l'activité humaine, qui se structure autour de l'expérience acquise et sans cesse transformée par les acteurs». Il évoque (ibid. p. 234) l'existence de «genèses identitaires, qui expriment des moments particuliers dans la construction de l'expérience». Ce sont ces moments particuliers, il y en a trois pour ma propre expérience, que je voudrais évoquer ici: le premier avec l'apparition des calculatrices graphiques, le deuxième avec l'apparition de réseaux de calculatrices, le troisième avec l'émergence des communautés d'enseignants en ligne (pour plus d'éléments sur cette genèse identitaire, voir Trouche 2009).

1.1 L'apparition des calculatrices graphiques

Le premier moment, dans ma mémoire, est marqué par l'apparition de calculatrices graphiques dans les classes, et la confrontation avec des phénomènes

didactiques nouveaux. La figure 1 montre ainsi une représentation graphique de la fonction ln(x) + 10 sin(x), qui apparaît principalement, pour les élèves comme une fonction 'qui oscille' (Guin & Trouche 1998). A la question «quelle est la limite de cette fonction en +∞?», les élèves, dans un environnement de calculatrices graphiques, répondent majoritairement «cette fonction n'a pas de limite», en appuyant leur réponse sur le caractère oscillant de la représentation graphique de la fonction. En l'absence de calculatrice graphique, les élèves s'appuient majoritairement sur la décomposition de la fonction en la somme de deux fonctions≠: ln(x) qui tend vers +∞, et de sin(x), qui est bornée, et répondent que la fonction f a pour imite +∞.

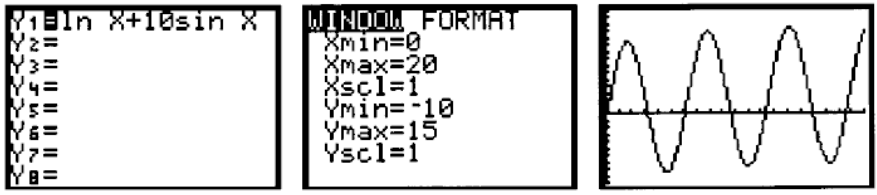


Figure 1. Copies d'écran de calculatrice pour la représentation d'une fonction 'oscillante' (Guin & Trouche 1998, p. 198)

Cette influence de certains artefacts sur les apprentissages mathématiques me conduit, avec d'autres chercheurs, à repenser les relations entre *instrumentation* et *conceptualisation*, ce qui sera le germe du développement de *l'approche instrumentale de la didactique* (Guin & Trouche 1998). Cette approche met en évidence la relation dialectique entre les artefacts et leurs utilisateurs: les artefacts conditionnent l'activité des élèves (ce sont les processus *d'instrumentation*), et les élèves dans le cours de leur activité située, adaptent les artefacts qu'ils adoptent (ce sont les processus *d'instrumentalisation*). Cette relation dialectique se développe différemment, selon les élèves, pouvant conduire à une forte dispersion des processus de conceptualisation, d'autant plus grande que les artefacts sont complexes. Rétrospectivement, je réalise que je me situais à cette époque, principalement, comme *enseignant* (j'étais professeur dans un lycée), considérant essentiellement l'enseignement et l'apprentissage comme des *faits individuels*.

1.2 L'apparition des réseaux de calculatrices

Le deuxième moment est marqué par l'apparition de réseaux de calculatrices graphiques, par exemple la technologie Navigator, développée par Texas Instruments (Figure 2).



Figure 2. La technologie TI-Navigator©, permettant de connecter 4 calculatrices graphiques à un hub en relation avec l'ordinateur du professeur

Ce type de technologie donne des moyens au professeur pour tenter de réduire la dispersion des comportements des élèves confrontés à la petitesse des écrans des calculatrices: la mise en réseau de ces calculatrices permet de mettre en commun les différents résultats proposés par les élèves, elle permet de faire de cette diversité une richesse au service des apprentissages. C'est cette idée que je développe lors du panel *Connectivity and virtual networks for learning*

coordonné par Celia Hoyles en 2006, lors de l'étude ICMI *Mathematics education and digital technology: Rethinking the terrain* (Hoyles *et al.* 2010).

De fait cette technologie donne de nouveaux moyens pour développer la réflexion autour de *l'orchestration instrumentale* des situations mathématiques. J'avais introduit ce concept d'orchestration instrumentale en 2004, puis repensé ce concept dans un travail conjoint avec Paul Drijvers (Drijvers & Trouche 2008). L'orchestration instrumentale visait la gestion didactique des artefacts pour la mise en œuvre d'une situation mathématique. Il s'agissait de penser les *configurations didactiques* dans la classe (la façon dont les élèves et les artefacts sont connectés) et les *modes d'exploitation* de ces configurations. Une configuration didactique emblématique est alors celle de l'élève Sherpa (Figure 3), qui repose sur l'affichage, sur l'écran de la classe, de l'écran de la calculatrice d'un des élèves de la classe, jouant ainsi le rôle de médiateur entre le maître et la classe.

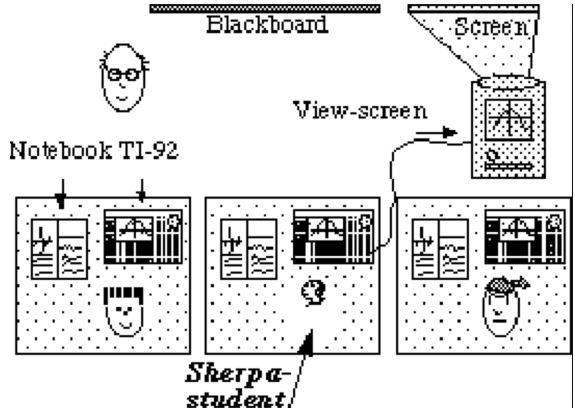


Figure 3. La configuration didactique de l'élève sherpa (Trouche 2004, p. 298)

Les réseaux de calculatrices, et autres dispositifs connectant les artefacts au sein de la classe, donnent des moyens repenser les orchestrations instrumentales, du point de vue de la diversité des configurations didactiques possibles, comme du concept lui-même. Drijvers et al. (2010) proposent ainsi d'ajouter, après les configurations didactiques et leurs modes d'exploitation, un niveau de performance didactique, correspondant à la mise en œuvre des orchestrations dans la classe, et aux multiples ajustements que le maître, et les élèves, peuvent réaliser dans le feu de l'action. Rétrospectivement, je réalise que je me situais principalement,

à cette époque, comme formateur d'enseignant, considérant toujours l'enseignement comme une responsabilité individuelle, mais l'apprentissage comme une responsabilité essentiellement collective, le maître jouant un rôle essentiel dans le développement d'un collectif apprenant.

1.3 L'émergence des communautés d'enseignants en ligne

Le troisième moment est marqué par le développement d'Internet, et l'émergence de communautés d'enseignants en ligne. En France, cette émergence est spectaculaire, avec le développement d'une association d'enseignants de mathématiques, Sésamath (http://www.sesamath.net/), qui mutualisent leurs ressources, en conçoivent collaborativement de nouvelles, et les mettent en ligne, offertes gratuitement à tous les enseignants intéressés (Gueudet & Trouche 2009a, Rocha & Trouche 2016). Il s'agit alors d'une véritable métamorphose du travail des enseignants, qui disposent d'un nombre quasiment illimité de ressources, et de moyens efficaces de partager leur expérience. Rétrospectivement, je réalise que c'est à ce moment là que je me conçois principalement comme chercheur. Le problème qui me mobilise principalement n'est plus alors de *soutenir* le travail des enseignants, mais de *comprendre* leurs interactions avec les ressources de leur enseignement. L'enseignement, comme l'apprentissage, apparaissent alors comme, essentiellement, des faits collectifs. De cette évolution va naître une nouvelle ligne de recherche, *l'approche documentaire du didactique*, développée dans un travail conjoint avec Ghislaine Gueudet (Gueudet & Trouche 2009b), approche qui est l'objet de la section suivante.

Pour conclure cette première section, je voudrais souligner que cette genèse identitaire de chercheur n'est pas seulement individuelle: c'est la trace individuelle de processus plus larges, comme nous l'avions étudié dans un texte de 2013 (Trouche *et al.*), qui s'intéressait, sur la base d'une étude de la littérature de recherche des années 2000 à 2008, aux *Technology-Driven Developments and Policy Implications for Mathematics Education*. Cette étude montrait bien l'évolution très large des thématiques de recherche au niveau international, évolution de la technologie vers les ressources, et évolution du travail individuel des enseignants vers les formes collectives de leur travail. Ces évolutions sont liées aux évolutions technologiques, mais aussi aux dynamiques des communautés de recherche et aux questionnements institutionnels.

Enfin, on peut noter que les outils de référencement sur le Web gardent aussi la trace des trois moments que je viens d'évoquer, autour des trois articles clés qui ont cristallisé les évolutions majeures d'une démarche de chercheur, et des collaborations associées, l'approche instrumentale du didactique en 1998, le concept d'orchestration instrumentale en 2004 et l'approche documentaire du didactique en 2009.

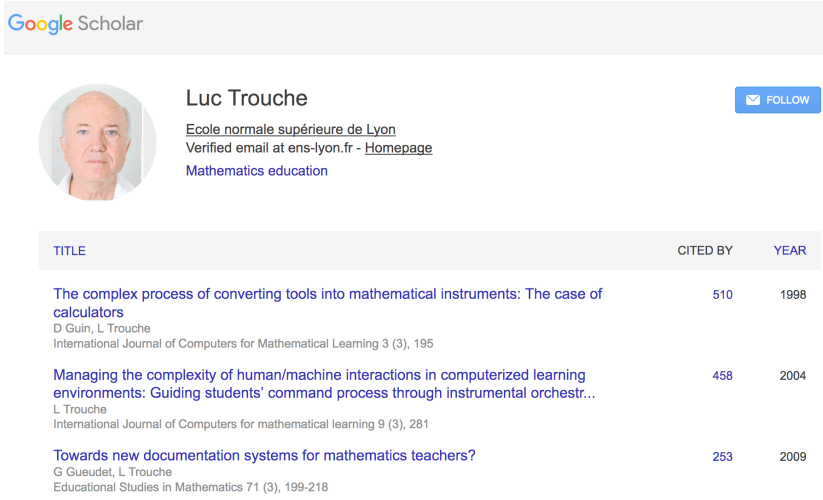


Figure 4. Les mesures, par Google Scholar, de la diffusion scientifique (relevé du 27 juillet 2018)

2. L'APPROCHE DOCUMENTAIRE DU DIDACTIQUE

Je présente dans cette section le cadre conceptuel dans lequel je situe aujourd'hui mes recherches, l'approche documentaire du didactique. Introduite à partir d'une réflexion conjointe avec Ghislaine Gueudet (Gueudet & Trouche 2008), puis développée dans un cadre international (Gueudet, Pepin & Trouche 2012), cette approche a été aussi exploitée dans un contexte brésilien (Assis, Gitirana, & Trouche 2018), chinois (Wang, Trouche, & Pepin 2018), ou encore mexicain (Sanchez 2010; Salinas-Hernández, Sacristán, & Trouche 2018). Je présente ci-dessous trois aspects critiques de cette approche: la notion de ressources, la dialectique ressources/documents, et la notion de système de ressources.

2.1 La notion critique de 'ressource'

La notion de 'ressource' est première. Nous la reprenons des travaux, dans le domaine de l'éducation mathématique, de Adler (2012): une ressource est tout ce qui est susceptible de *re-sourcer* le travail des professeurs. Un professeur interagit avec des ensembles de ressources ; celles-ci sont travaillées (adaptées, révisées, réorganisées...), au cours de processus articulant étroitement conception et mise en œuvre : c'est l'ensemble de ce travail que nous nommons travail documentaire. La documentation désigne à la fois ce travail, et ce qu'il produit. Le travail documentaire est central dans l'activité professionnelle des professeurs. Il habite tous les aspects de cette activité, tous ses lieux, tous ses temps. Nous portons sur l'activité des professeurs un regard d'ensemble, et nous considérons les interactions avec des ressources comme des éléments majeurs de cette activité professionnelle ; ainsi cette définition large de ressources s'impose. Nous tenons compte cependant de la diversité de certaines caractéristiques des ressources : certaines sont matérielles, ce qui permet un suivi plus direct des interactions (notes prises sur un livre, modifications d'un fichier) ; d'autres, non matérielles, sont plus difficiles d'accès, mais peuvent cependant jouer un rôle déterminant, comme les interactions, verbales ou non, en classe avec les élèves. Nous nous attachons à mettre en évidence, dans nos analyses, des spécificités pertinentes, en particulier celles des ressources matérielles numériques. Depuis l'introduction de cette approche, de nombreux travaux ont tenté de préciser cette notion de ressource, par exemple Hammoud (2012), distinguant ressources mères (celles que le professeur mobilise pour préparer son cours) et ressources files (celles que le professeur produit et met en œuvre dans sa classe). Un projet national de recherche, en France (ReVEA, https://www.anr-revea.fr/) a aussi exploré la diversité des ressources utilisées et développées par les enseignants dans un temps (2014-2018) de transition numérique (Trouche *et al.* 2018). La place des ressources numériques (Pepin et al. 2017) traduit, et implique en effet des changements majeurs (en particulier: évolution de la nature et du rôle des manuels scolaires, nouveaux équilibres entre usages et conceptions de ressources).

2.2 Dialectique ressources/documents et genèses documentaires

Nous présentons ici les concepts élémentaires de l'approche documentaire. Le point de départ de celle-ci est l'approche instrumentale (déjà introduite § 1.1),

telle qu'elle a été développée par Rabardel (1995) en ergonomie cognitive, puis intégrée en didactique des mathématiques (Guin & Trouche 1998, Trouche 2005). Rabardel distingue un artefact, disponible pour un utilisateur donné, et un instrument que cet utilisateur construit, à partir de cet artefact, dans le cours de son action située. Ces processus de développement, les genèses instrumentales (Figure 5), reposent, pour un individu donné, sur l'appropriation et la transformation de l'artefact, pour résoudre un problème donné, à travers une variété de contextes d'usage. À travers cette variété de contextes se constituent des schèmes d'utilisation de l'artefact : un schème (Vergnaud 2009) est une organisation invariante de l'activité, qui comporte notamment des règles d'action, et est structurée par des invariants opératoires qui se forgent au cours de, et qui pilotent, cette activité, dans différents contextes rencontrés pour la même classe de situations. On peut alors proposer une définition synthétique : instrument = artefact + schème. Cette approche distingue aussi, au cœur des genèses instrumentales, deux types de processus imbriqués, les processus d'instrumentation (constitution des schèmes d'utilisation des artefacts) et les processus d'instrumentalisation (par lesquels le sujet met à sa main les artefacts). Les genèses instrumentales ne doivent pas être pensées comme des mécanismes de production, avec un début et une fin clairement identifiables. Ce sont des processus qui s'étendent dans le temps, incluant des moments de stabilité et des ruptures. Dans l'acception du terme que nous retenons ici, genèse peut signifier à la fois naissance et transformation, mais ne désigne jamais une création ex nihilo.

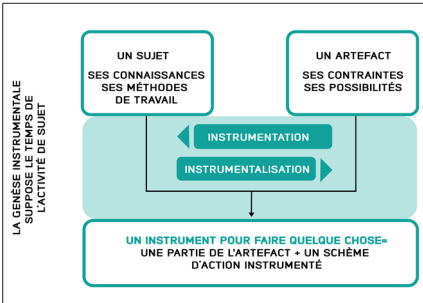


Figure 5. Une modélisation d'une genèse instrumentale (Trouche 2005, p. 144)

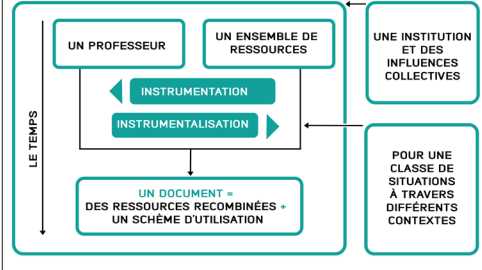


Figure 6. Une modélisation d'une genèse documentaire (Gueudet & Trouche 2012, p. 26)

L'importance du travail documentaire des professeurs nous a conduits à développer une approche prolongeant l'approche instrumentale et s'appuyant, en outre, sur d'autres recherches. Celles-ci relèvent en particulier de l'ingénierie documentaire (Pédauque 2006), qui a mis en lumière les bouleversements liés au numérique, et de l'étude du *curriculum material* (Remillard 2005), qui considère les interactions entre les professeurs et la documentation scolaire.

Le professeur interagit avec des ressources, dont l'étendue dépasse celle des artefacts. Nous considérons qu'un ensemble de ressources donne naissance, pour une classe de situations, au cours d'une genèse documentaire, à un document (Figure 6). Ce terme, inspiré de l'ingénierie documentaire (Pédauque 2006), désigne donc ici un concept qui généralise celui d'instrument. Le travail documentaire du professeur est le moteur d'une genèse documentaire, qui développe conjointement une nouvelle ressource (composée d'un ensemble de ressources sélectionnées, modifiées, recombinées) et un schème d'utilisation de cette ressource. Nous pouvons représenter, de manière très simplifiée, ce processus par l'équation: Document = Ressources recombinées + Schème d'utilisation.

Un schème d'utilisation comporte en particulier des règles d'action, et des invariants opératoires qui sont ici des connaissances professionnelles des enseignants. Nous ne nous référons pas ici à une catégorisation de telles connaissances, mais désignons par ce terme l'ensemble des connaissances susceptibles d'intervenir dans l'activité professionnelle des enseignants. Ces connaissances peuvent être mathématiques, elles peuvent concerner les types de tâches à proposer aux élèves, les difficultés à anticiper etc.. La notion d'invariant est compatible avec l'aspect dynamique des genèses : face à de nouvelles ressources, à une nouvelle classe de situations, le professeur puise dans son répertoire d'invariants ; ceux-ci sont associés, modifiés, engendrant de nouveaux invariants. Ainsi les interactions avec des ressources sont essentielles pour les évolutions des connaissances des professeurs. Les ressources qu'un professeur travaille sont des ressources vivantes, sans cesse renouvelées, et l'analyse de son développement professionnel peut s'appuyer sur l'analyse de la trajectoire des ressources qu'il mobilise.

Les modélisations présentées Figures 5 et 6 paraissent très proches. En fait elles diffèrent profondément. L'approche instrumentale a été développée essentiellement pour comprendre les effets de l'intégration *d'un nouvel* artefact dans l'activité d'un étudiant ou d'un professeur. L'approche documentaire se veut être une approche holistique, prenant en compte *l'ensemble des ressources, anciennes, récentes, ou nouvelles*, qui entrent en jeu dans le travail du

professeur. Dans ce cadre, les processus d'instrumentation et d'instrumentalisation prennent un nouveau relief: pour l'instrumentation, ce n'est plus un seul artefact, mais un ensemble vaste de ressources qui vont contribuer à configurer l'activité didactique du professeur; pour l'instrumentalisation, l'activité créatrice du professeur est beaucoup plus visible quand il *adapte* pour les *adopter* des ressources, que quand il s'approprie un artefact donné. Cette diversité de ressources a conduit à introduire de nouveaux concepts, donnant une importance particulière à la notion de *système*.

2.3 Systèmes de ressources, systèmes documentaires et systèmes d'activité

On peut, dans un premier temps, considérer que les documents d'un professeur sont articulés selon la structuration institutionnelle du contenu mathématique à enseigner. Cependant l'observation de plusieurs enseignants montre d'emblée des différences significatives, de l'un à l'autre, qui indiquent la nécessité de dépasser ce premier niveau explicatif. Dans le cadre de l'approche instrumentale, Rabardel et Bourmaud (2005) considèrent des systèmes d'instruments organisés, dont la structure est en relation avec celle de l'activité professionnelle des sujets. Au-delà des classes de situations, qui donnent matière au développement d'un même schème, Rabardel et Bourmaud proposent un regroupement des situations d'activité professionnelles en familles d'activité, ensembles de classes de situations qui correspondent à un même type de finalité générale de l'action. Reprenant cette perspective, nous nommons *système d'activité* l'ensemble des familles d'activité d'un sujet (par exemple: préparer les cours, ou encore corriger des copies, ou encore mettre en œuvre des ressources en classe). Nous considérons, comme Rabardel et Bourmaud, que les documents d'un professeur s'articulent en *syst*èmes documentaires, en lien avec leurs systèmes d'activité. Il s'agit d'un choix théorique, effectué a priori en cohérence avec l'approche instrumentale et avec l'importance accordée aux connaissances professionnelles des professeurs.

Le *système de ressources* du professeur constitue la part « ressources » de son système documentaire (c'est-à-dire sans la partie schèmes des documents). Dans la perspective que nous adoptons, le système documentaire est composé du système de ressources et des connaissances professionnelles associées ; le tout est articulé avec le système d'activité des professeurs. Dans les développements ultérieurs de l'approche documentaire, au lieu d'une logique top-down,

qui s'intéresse d'abord au système documentaire, et ensuite au système de ressources du professeur, on a plutôt développé une logique bottom-up, s'intéressant d'abord au système de ressources du professeur, avant de tenter d'en inférer des éléments de son système documentaire (voir par exemple Pepin *et al.* 2016). Le système de ressources du professeur est alors l'unité d'analyse pertinente pour comprendre son activité, en particulier l'intégration, ou l'intégrabilité, d'une nouvelle ressource qui lui est proposée.

Le lecteur intéressé pourra trouver des exemples d'études de genèses documentaires, de processus d'instrumentation et d'instrumentalisation dans les entrées de l'Encyclopedia of Mathematics Education publiées récemment (Trouche 2018b, Trouche 2018c, Trouche, Gueudet & Pepin 2018). Nous allons nous intéresser, dans la section suivante, aux différentes formes que peut prendre le travail des enseignants avec des ressources, dans une perspective de formation.

3. UNE RESSOURCE SUSCEPTIBLE DE STIMULER L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DES PROFESSEURS ET DES ÉTUDIANTS

Cette section peut-être considérée comme une parenthèse, ou une respiration mathématique, dans cet article. Il s'agit de proposer un problème mathématique, susceptible de re-sourcer l'activité mathématique d'un étudiant, ou d'un professeur. Nous verrons dans les sections suivantes (§ 4 et § 5) comment ce problème peut être pensé dans la perspective d'une intégration au système de ressources d'un professeur. Nous présentons d'abord le problème lui-même, puis nous donnons à voir quelques résultats issus d'un court brainstorming d'étudiants, d'enseignants et de chercheurs confrontés à ce problème.

3.1 Le problème 'Traces d'une bicyclette'

La géométrie et l'imagination est un livre de David Hilbert et Stephan Cohn-Vossen basé sur une série de conférences que Hilbert a faites pendant l'hiver 1920–21, originellement publiées en 1952.

John Conway, Peter Doyle, Jane Gilman, Bill Thurston reprirent ce titre pour un cours donné n juin 1991 au centre de géométrie de l'Université du Minnesota (https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/gi/gi.pdf). Le problème 'Traces d'une bicyclette (Fenêtre 1) vient de ce cours.

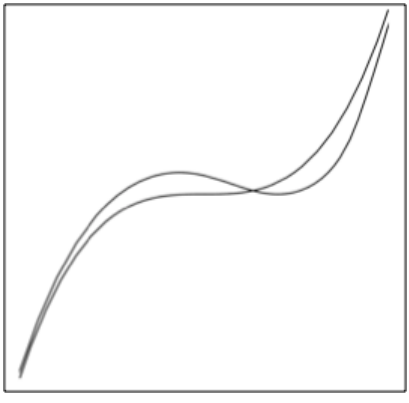
Fenêtre 1
Traces d'une bicyclette

C. Dennis Thron a attiré l'attention sur le passage suivant des Aventures de l'école Priory, par Sir Arthur Conan Doyle :

- cette trace, comme vous le voyez, a été faite par un cycliste qui venait de l'école.
- ou qui y allait ?
- non non, mon cher Watson. La trace la plus profonde est, bien sûr, la trace de la roue arrière, sur laquelle le poids repose. Vous pouvez voir plusieurs endroits où cette roue a recoupé et a effacé la marque moins profonde de la roue avant. Le cycliste était bien en train de s'éloigner de l'école.'

Problème

1. Discutez ce passage. Est-ce que Holmes sait de quoi il parle ?
2. Essayer de déterminer la direction de déplacement de la bicyclette dont les traces des roues sont modélisés par la figure ci-dessous ?



3. Essayez de dessiner vos propres traces de roues de bicyclettes idéalisées. Vous n'avez pas besoin d'un ordinateur pour cela; juste une idée de la relation est entre la trace de la roue avant et celle de la roue arrière. Quelle est selon vous la qualité de cette simulation?

4. Sortez et observez des traces de bicyclette dans la nature. Pouvez-vous dire dans quelle direction le vélo allait? Entraînez-vous jusqu'à ce que vous puissiez déterminer la direction du déplacement rapidement et avec précision.

3.2 Quelques réponses issues d'un court brainstorming

Lors du séminaire donné à l'Institut Freudenthal (Trouche 2018a), j'ai proposé aux participants un bref brainstorming, orchestrant le travail de la manière suivante:

- La figure 1 était affichée sur une feuille partagée en ligne, affichée sur l'écran de la salle, avec la question 'Pourriez-vous proposer une idée pour saisir le problème (en se concentrant sur une caractéristique donnée du dessin, et / ou en utilisant un artefact donné, et / ou un cadre mathématique donné, ou...) ;
- Les petits groupes de travail (4 personnes chacun), chacun avec au moins un ordinateur portable connecté, doivent réfléchir ensemble (30mn) et écrire leurs idées, affichées sur la feuille partagée ;
- Puis discussion générale

Les six groupes ont proposé les éléments de réponses suivants (simplement traduits ici de l'anglais au français):

> Groupe 1 : «Nous créons un dessin avec une clé USB faisant office de vélo, un stylo pointé sur l'avant et un stylo pointé sur l'arrière créant des courbes en se déplaçant sur un papier. Cette expérience nous a conduit à la conjecture que le vélo se déplace "vers le haut", puisque le point d'intersection arrive "après". La roue avant fait les plus grandes courbes».
> Groupe 2 : «Déterminez d'abord la roue avant en regardant l'intersection et la courbure (la plus grande courbe)».
> Groupe 3 : «La courbure dans le coin supérieur droit est moins nette. On dirait une correction. Peut-on connaître la profondeur de la trace ? Est-ce que le point d'intersection est un point de symétrie? Plus ou moins"...
> Groupe 4: «Deux roues. La roue avant peut avoir des courbes plus nettes. La distance entre les points de la roue est constante (quelle que soit l'orientation de la roue avant). Problème : nous ne connaissons pas la taille du vélo. Solution-suggestion: approche itérative consistant à utiliser un modèle de vélo de longueur variable pour voir s'il existe une longueur où la distance entre les points est constante ».
> Groupe 5: «Nous avons allumé l'ordinateur portable et avons découvert une différence dans les courbes. Plus courbé → roue avant. La distance entre l'arrière et l'avant est constante → vous ne pouvez pas l'utiliser (triangle fixe). La surface entre les courbes aurait-elle de l'importance? Dérivé?"

> Groupe 6: «Quelle trace correspond à quelle roue (avant ou arrière)? Nous voyons un point de symétrie : difficile de décider dans quelle direction va le vélo. Faisons-nous des recherches théoriques ou empiriques? Avoir quelqu'un à vélo ... ou utilisons-nous le muscle de notre cerveau?

Ces réponses, rassemblées sur la feuille partagée en ligne, ne montrent qu'une partie de l'activité des participants: nous n'avons pas accès à tous les petits dessins réalisés au cours du brainstorming, ni aux gestes produits, par exemple avec la clé USB agissant comme le vélo... Cependant on imagine bien la richesse et la variété de cette activité, mettant en évidence le potentiel de ce problème.

L'activité, ici, est très contrainte par le temps (uniquement 30 mn!). Elle s'adresse à des personnes plutôt expertes de ce type de problème (doctorants, enseignants et chercheurs d'un institut, l'Institut Freudenthal, dédié à la réflexion sur l'éducation mathématique exploitant des problèmes 'réalistes' (voir par exemple Van den Heuvel-Panhuizen 2003). Comment penser l'exploitation de ce problème dans un temps plus long, avec la perspective d'une intégration réelle d'une nouvelle ressource dans le système de ressources des étudiants ou des professeurs 'ordinaires'? C'est ce que nous allons étudier dans la section suivante.

4. UN PROBLÈME INTÉGRÉ EN 2002 DANS LE CONTEXTE D'UN PROGRAMME AVANCÉ DE FORMATION DES MAÎTRES EN FRANCE

Nous présentons dans cette section l'exploitation de la ressource «Bicycle tracks» dans un contexte de formation continue des professeurs. Dans une première partie, nous présentons le dispositif de formation des maîtres en question, le SFoDEM; dans une deuxième partie, nous présentons le modèle de ressource issu du travail collaboratif des enseignants impliqués dans le SFoDEM; enfin, nous présentons la mise de la ressource «Bicycle tracks» au modèle SFoDEM.

4.1 Le SFoDEM, un dispositif ambitieux de formation des enseignants, pensé sur le long terme

Le SFoDEM (Suivi de formation à distance pour les enseignants de mathématiques) a été conçu et mis en œuvre en France, de 2000 à 2006, par l'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques) de Montpellier,

visant à aider les professeurs de mathématiques à intégrer, dans leurs pratiques de classe, les TIC (Technologies de l'Information et de la Communication) (Guin & Trouche 2005).

Il reposait sur cinq hypothèses principales: l'évolution des pratiques demande du temps (la formation durait donc 6 ans); elle nécessite un soutien continu (une plateforme en ligne a été mobilisée pour faciliter les interactions des enseignants entre deux réunions en présentiel); il faut un travail de conception commun associant enseignants et chercheurs pour renouveler les ressources intégrant les TIC ; ce travail doit articuler des phases de conception collaborative, de mise en œuvre en classe, de réflexion et de révision des ressources; il doit prendre en compte le contexte de la formation (à la fois technologique et mathématique). Il apparaît clairement que SFoDEM était un incubateur pour l'approche documentaire de la didactique, fondamentalement basée sur l'idée d'une évolution commune des ressources et des connaissances des enseignants.

Cinq thèmes de formation ont été choisis (transition entre l'arithmétique et l'algèbre ; calculatrices graphiques et symboliques; logiciels de géométrie dynamique, simulation d'expériences aléatoires ; et résolution coopérative de problèmes via Internet). Chaque thème avait toute liberté pour développer ses ressources selon un modèle bien adapté à son propre contexte technologique et mathématique, et une cellule de formation réunissant tous les participants a tenté de donner un sens aux différentes expériences. Cette cellule a tenté de développer des modèles communs, tant pour l'organisation des interactions que pour les ressources elles-mêmes. Les principaux enseignements de ces expériences sont présentés dans un CDRom (Guin, Joab & Trouche 2008).

L'une de ces leçons était que les ressources initiales fournies par les formateurs, souvent des experts, étaient trop complexes pour une expérimentation par des stagiaires dans leur propre classe. Il y a eu ensuite, d'ailleurs, une évolution vers des ressources plus simples, plus faciles à mettre en œuvre et vers des ateliers virtuels de stagiaires initiant le processus de conception à partir de «germes de ressources». Cette évolution peut être considérée comme une évolution d'une approche descendante vers une approche ascendante. Une autre leçon portait sur l'intérêt de disposer d'un modèle commun permettant de partager les ressources, un tel modèle constituant un support pour les enseignants, tant pour la conception de nouvelles ressources que pour leur appropriation.

4.2 Le modèle SFoDEM, émergeant du travail collaboratif des enseignants, et du croisement entre les différents thèmes de formation

Le travail à distance et les exigences de la communication ont entraîné une explicitation de faits et gestes accompagnant la conception et la mise en œuvre de chaque ressource (Gueudet & Trouche 2008). Ainsi, dans le groupe dédié à l'intégration des logiciels de géométrie dynamique, le travail documentaire commun passe par plusieurs étapes successives: choix d'un problème mathématique, réflexion sur la contribution possible d'un logiciel de géométrie à l'exploitation de cette situation en classe, écriture d'une «fiche» à destination des élèves, conception *a priori* de *scénarios d'usage* (c'est-à-dire de propositions d'orchestrations instrumentales), mise en œuvre effective de la ressource dans chacune des classes, discussion collective sur les effets de cette mise en œuvre, écriture d'une fiche à destination d'un autre professeur (proposant des variables possibles pour le scénario, avertissant d'éventuelles difficultés), réflexion sur les liens à établir entre les différentes fiches numérisées, réflexion sur l'indexation de cette ressource. On observe ainsi le développement *de* répertoires communs, pour chaque thème de formation.

Ce développement de répertoire, dans chaque groupe, va de pair avec l'émergence d'un modèle commun de ressources, au sens de résultat d'un processus de modélisation du travail documentaire: on l'a vu, dans le groupe géométrie, à travers l'émergence de scénarios d'usage, de comptes rendus d'expérimentation. Ce modèle a évolué de façon itérative, par des allers-retours entre les ressources existantes dans chaque groupe et les ressources rencontrées par ailleurs, entre les besoins de chaque thème et les besoins de l'ensemble du SFoDEM. La figure 7 montre les grandes étapes de cette évolution. Au départ (2000), coexistaient différents modèles, suivant les groupes (par exemple une courte description de la ressource, une fiche pour l'élève et une fiche pour le professeur donnant quelques éléments de réflexion sur le problème posé). Peu à peu, les modèles initiaux se sont enrichis, et la confrontation des différents modèles a permis l'émergence d'un modèle commun, par exemple l'ajout d'une fiche *traces de travaux d'élèves,* apparue dans le groupe résolution de problèmes qui voulait intégrer dans chaque ressource certaines *narrations de recherche* des élèves et n'arrivait pas à le faire dans le compte-rendu d'expérimentation, davantage utilisé pour intégrer les observations du professeur; cet ajout est discuté ensuite dans les autres groupes du SFoDEM, qui vont l'adapter à de nouveaux usages (l'intégration dans la ressource de copies d'écran, ou de copies d'élèves correspondant

à des moments critiques du travail dans la classe, résultat et support d'une réflexion didactique).

Le dernier ajout à la structure est le CV (curriculum vitae de la ressource). Il permet d'inscrire dans la ressource son histoire propre, ses auteurs successifs et les motivations de ses évolutions. La ressource est bien vivante, et chaque nouvel utilisateur, en se l'appropriant, se constitue en nouveau maillon d'une chaîne d'utilisateurs/auteurs. Des fichiers-satellites sont des éléments communs à plusieurs ressources: il peut s'agir d'éléments de mode d'emploi d'un logiciel, ou d'éléments théoriques produits de la réflexion d'un des thèmes de formation.

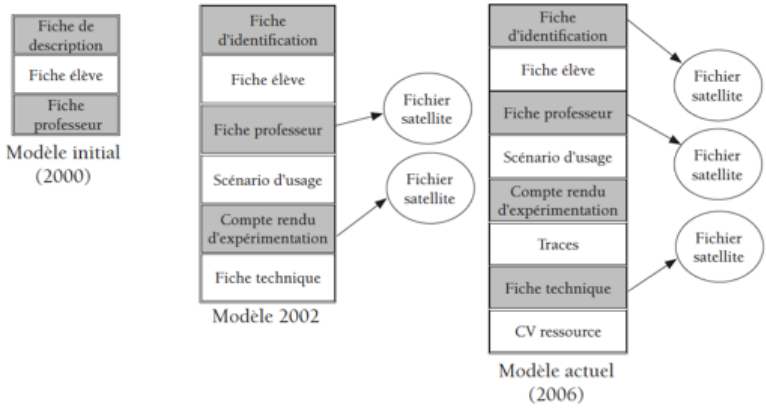


Figure 7. L'évolution du modèle de ressources du SFoDEM (Gueudet & Trouche 2008, p. 25)

Ce modèle fournit un cadre général pour la conception. Il constitue une sorte d'objectif pour les auteurs de ressources, mais, pratiquement, la structure des ressources conçues peut varier, comme le montre la médiathèque de ressources SFoDEM (Guin, Joab & Trouche 2006), en fonction du degré de maturité de la ressource conçue, ou encore de l'expérience des concepteurs.

4.3 Le problème 'Bicycle tracks' digéré par le SFoDEM

Le problème 'bicycle tracks' a été introduit par un chercheur participant au groupe de formation 'Cooperative problem solving via Internet', en 2005, vers la fin de

l'existence du dispositif SFoDEM. Le groupe n'a donc pas eu le temps de développer toute la ressource selon le modèle. Il a seulement développé trois éléments de ce modèle: une fiche d'identification, une fiche élève et une fiche professeur.

On trouvera (Window 2) la fiche professeur, qui restitue l'expérience du groupe de professeurs qui ont travaillé cette ressources: deux heures dans le groupe de formation, associant, par petits groupes, professeurs et formateurs, résolvant le problème pour eux-mêmes, puis dans leurs classes, pour plusieurs séances de travail, puis à nouveau dans le groupe de formation pour un bilan critique des interactions avec les élèves. Le groupe utilise Internet à deux niveaux: pour les échanges entre professeurs, et pour les échanges entre les classes. C'est donc une dizaine d'heures de travail, pour chaque professeur, sur cette ressource (à comparer avec les 30mn de réflexion mobilisées dans le séminaire de l'Institut Freudenthal (§ 3.3).

Window 2
'Bicycle tracks' : la fiche professeur conçue par un groupe du SFoDEM
http://www.math.univ-montp2.fr/sfodem/BibliothequeSfodem/sfodem_HTML/Chap1/th5r12_fp1.html

Le principal intérêt de ce problème est celui de la modélisation, et de la prise de choix qui en dépend. La question elle-même pose souvent de gros problèmes aux élèves.

- Pourquoi se pose-t-on cette question? Le problème peut être présenté comme une énigme policière, avec référence à Sherlock Holmes.
- S'agit-il de traces faites par un seul vélo, ou bien par deux? Ne pourrait-il pas s'agir de deux vélos, puisqu'il y a deux traces? Les élèves ont des difficultés à concevoir la nature des traces qu'un vélo peut laisser sur le sol. Pour les aider, on peut leur suggérer d'imaginer qu'ils poussent un vélo sur le sol, en regardant les roues se déplacer ; quel genre de traces vont-ils voir? En particulier, la trace de la roue arrière va-t-elle toujours recouvrir celle de la première?
- La vitesse joue-t-elle un rôle particulier?
- Sait-on si le terrain monte ou descend?
- Les dérapages sont-ils possibles? Cette question est importante, puisqu'il s'agit de faire un choix raisonnable et de voir quel travail on peut faire à partir de ce choix. A priori rien n'empêche d'imaginer que le vélo a dérapé à l'endroit de la figure... Si les dérapages sont autorisés, on peut penser que «tout a pu arriver» (penser par exemple à un équilibriste ou à un virtuose du vélo acrobatique: sans doute peuvent-ils faire sur le sol des traces très étranges) et donc que le problème ne peut pas être résolu (on ne dispose pas d'assez de données). Pourtant, face au choix «dérapage ou pas dérapage», on peut faire sentir aux élèves que l'on aboutit à deux problèmes dont l'un est contenu dans l'autre, et qu'il est en l'occurrence plus facile à résoudre le cas où la contrainte est la plus forte. A posteriori, on pourra d'ailleurs justifier ce choix, puisque l'analyse des traces montre qu'effectivement un vélo a pu faire ces

traces sans réaliser de dérapage ; on en conclut que, si dérapages il y a eu, ceux-ci étaient probablement négligeables. Autre problème de modélisation pour les plus pointilleux: l'axe du guidon d'un vélo n'étant pas vertical, la distance entre les points de contact des roues avec le sol se modifie légèrement lorsque le vélo tourne... De même, peut-être peut-on négliger ce point dans un premier temps et voir si on arrive à quelque chose d'intéressant.

Une fois qu'il est acquis qu'il s'agit des traces laissées par un seul vélo au cours d'un même aller, les élèves essaient en général de distinguer les traces des roues avant et arrière. Deux conjectures naturelles apparaissent fréquemment:

- La roue arrière est celle qui parcourt le moins de chemin;
- La roue avant est celle dont la courbure est la plus grande;
- Deux autres éléments de la figure attirent l'attention:
- Le point de croisement: comment l'analyser? Donne-t-il des informations?
- Les points d'inflexion des courbes: ils montrent le «moment» où le vélo a changé de direction. Arrivent-ils simultanément?

Pour aider à la résolution, on peut poser la question suivante, qui peut sembler étrange: «Quelle était la taille du vélo, à l'échelle du dessin?» L'idée est de suggérer aux élèves de représenter le vélo en différents endroits du trajet, et de leur faire découvrir qu'un des deux sens est impossible si on veut que le vélo ait une taille constante.
Quelques prolongements possibles:

- Deux vélos de tailles différentes peuvent-ils laisser des traces identiques?
- Est-il possible que les mêmes traces puissent être parcourues dans un sens et dans l'autre?

La clé du problème réside dans le fait que, à tout moment, les roues du vélo sont *tangentes* aux traces qu'elles laissent sur le sol. La roue arrière est, de ce point du vue, la plus intéressante car elle se trouve toujours dans l'axe du vélo (elle ne tourne pas). Si on prend un point de la trace de la roue arrière (AR sur le dessin ci-dessous) et qu'on prolonge sa tangente dans le sens de parcours, cette tangente doit couper la trace de la roue avant en un point (AV dans le dessin ci-dessous) de sorte que la distance entre AR et AV soit constante. Sur la figure proposée, cette analyse permet d'identifier les traces (roue arrière et roue avant) et de déterminer le sens de parcours.



La lecture de cette fiche professeur, produit de l'expérience des professeurs impliqués dans le groupe, appelle plusieurs remarques.

En premier lieu, elle témoigne de la richesse cette fiche professeur, dès lors qu'elle mutualise l'expérience de la collaboration des professeurs, et de la coopération des élèves dans les classes. La variété des questions posées, la variété des éléments d'observation qui pourraient être pertinents, apparaissent susceptible de réellement soutenir la mise en œuvre du problème, par un professeur qui n'a pas vécu directement la formation, dans sa classe.

En deuxième lieu, on peut être surpris sur fait que personne ne suggère de faire l'expérience elle-même, avec un vélo sur le sable...; personne non plus ne suggère d'utiliser un artefact qui permette de modéliser la trajectoire d'un vélo (comme la clé USB lors du séminaire à l'Institut Freudenthal), ou un logiciel de géométrie, alors que la formation aux TIC constitue un point sensible du dispositif SFoDEM; enfin (alors que l'Internet est l'un des outils de ce thème de formation), personne ne suggère d'utiliser Internet pour trouver des ressources complémentaires permettant d'éclairer le problème. Les outils suggérés sont des outils de représentation graphique «à la main» des traces du vélo. On verra, dans la section suivante, que, 13 ans après, et dans un autre contexte, les ressources mobilisées sont très différentes.

Finalement, on a ici un bon exemple *d'instrumentalisation* d'une ressource initiale, le problème 'Bicycle tracks', adaptée par les membres du groupe pour être intégrée dans leurs systèmes de ressources. Comment a joué, pour chacun d'entre eux l'instrumentation, c'est-à-dire comment l'intégration de cette ressource nouvelle a conduit à modifier leur activité propre en classe: le CDRom (Guin, Joab & Trouche 2008) propose des témoignages d'acteur qui mettent en évidence l'influence du travail documentaire collectif, pendant un temps assez long, sur le travail documentaire individuel de chaque acteur.

5. UN PROBLÈME INTÉGRÉ DANS LE TRAVAIL D'UN CYCLE DE SÉMINAIRES AU CINVSTAV (MEXICO) EN AVRIL 2017

Le problème Traces d'une bicyclette' a été proposé en 2017, 12 ans après l'expérience présentée dans la section précédente, dans le cadre d'un séjour scientifique, répondant à l'invitation de Luis Moreno et Armando Cuevas, du département d'enseignement des mathématiques du CINVESTAV (Mexico).

5.1 Orchestration de la recherche

Ce séjour était organisé autour d'un séminaire mensuel de travail, regroupant les doctorant et les chercheurs du département. Le séminaire du 7 avril était consacré à la présentation de l'ouvrage *Tools and mathematics, instruments for learning* (Monaghan, Trouche, & Borwein 2016). Intitulé *Explorando, compartiendo experiencia y experimentando – una travesía inspiradora en la (educación) matemática*, le séminaire proposait l'exploration de plusieurs problèmes, le dernier étant le problème 'Bicycle track's (Figure 8). Les membres du séminaire étaient alors invités à réfléchir à ce problème, individuellement ou en groupes, et à partager les solutions, mêmes partielles, sur un espace en ligne partagé.

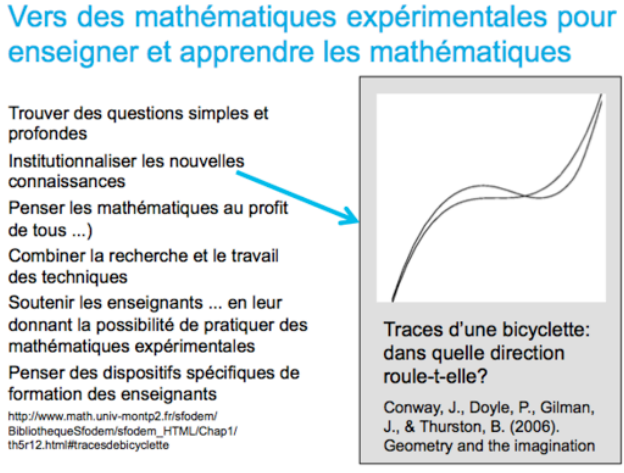


Figure 8. La présentation du problème au séminaire du 7 avril 2017

La réflexion sera reprise dans un séminaire organisé avec Ana Isabel Sacristan, le 24 avril 2017, intitulé *Estimular la creatividad para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Les participants étaient alors invités à reprendre le problème par petits groupes pendant 30mn, puis à inscrire les pistes de réponse sur un tableau, permettant de confronter les différentes approches (Figure 9). Après une discusion générale, mettant en évidence des points d'appui pour la résolution, des photos du tableau sont prises, stockées dans l'espace en ligne partagé, pour que chacun puis poursuivre la réflexion.

Le problème avance ainsi, par étapes successives, combinant discussion en groupes, réflexion personnelle, et échanges par email entre les étudiants et les chercheurs. Que retenir de ces échanges, pour l'économie de la résolution, ansi que pour le développement des systèmes de ressources des acteurs concernés?

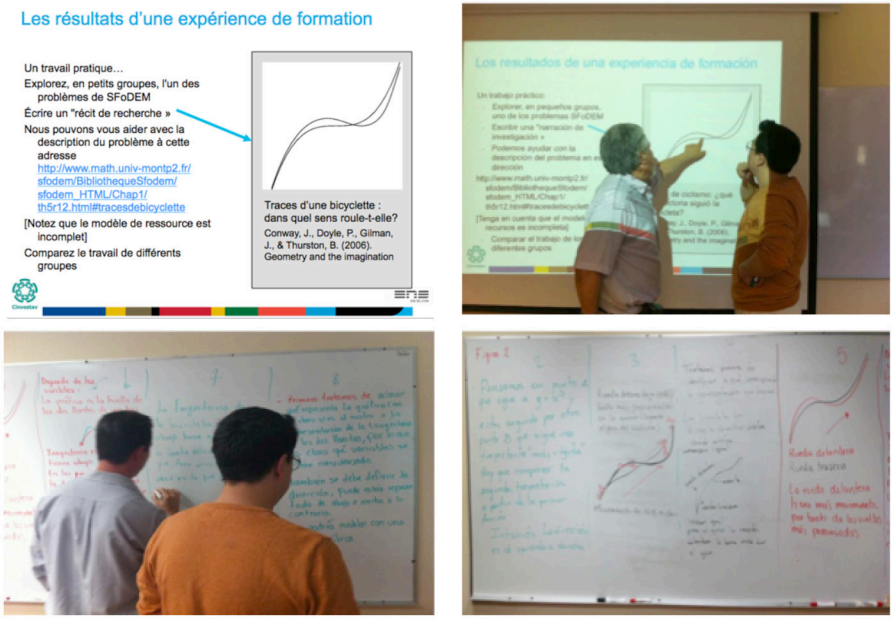


Figure 9. L'organisation de la réflexion lors du séminaire du 24 avril 2017

5.2 La contribution des logiciels de géométrie

La première différence notable est la mobilisation de logiciels de géométrie dynamique, sollicités naturellement, comme outils de résolution de problème (alors que ces outils ne sont pas apparus 12 ans avant). Comme on le voit avec le début de la résolution d'un étudiant (Window 3), exploiter un logiciel de géométrie dynamique, cela revient à exprimer mathématiquement les contraintes de la figure, c'est, en fait, s'engager dans une démarche de construction et de preuve.

Fenêtre 3

Traces des roues d'une bicyclette

Juan Jesús Gutiérrez García - juan.gutierrez@cinvestav.mx

On décrit comment approcher la trace laissée par les roues d'une bicyclette au sol, à l'aide de GeoGebra. Pour cela, le mouvement de la roue arrière du vélo est approché en supposant que la roue avant suit une courbe définie par une fonction. Le problème initial est proposé par le Dr Trouche dans l'une de ses conférences.

On fait les hypothèses suivantes : la longueur de la bicyclette est connue et on l'appelle Longb; la trajectoire de la roue avant est liée à une fonction que nous appelons trajx de (nous avons choisi x3, mais cette fonction pourra être modifiée autant que de besoin). Le point de contact de la roue avant avec le sol est appelé A et sera défini comme un point de la trajectoire liée à la fonction définie. Le point de contact de la roue arrière avec le sol sera appelé B et se situera à une distance Longb du point A, c'est-à-dire, sur une circonférence de rayon Longb et centrée sur A, ceci conduit à une configuration telle que montrée dans la figure a.

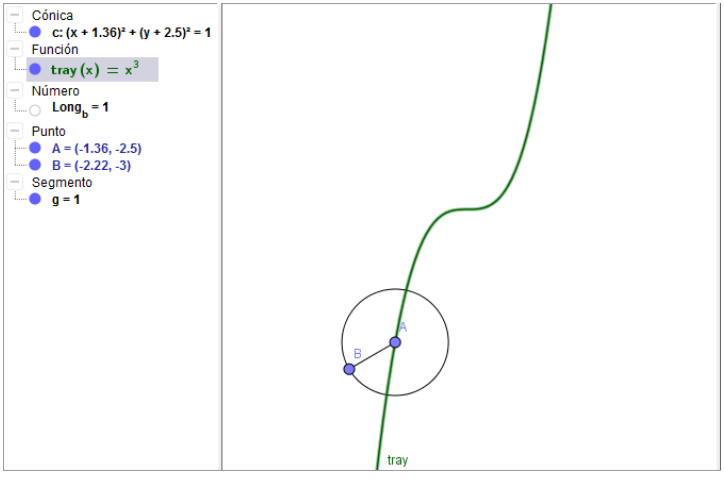


Figure a. Configuration initiale pour se rapprocher du mouvement du point B

Le segment marqué g décrit la position initiale du vélo avant de commencer à avancer et, le point B étant libre, il peut être démarré à partir de toute position possible. Maintenant, lorsque le point A se déplace le long de la trajectoire, il glisse jusqu'au point B. Si nous supposons un petit mouvement du point A, le point B se déplacera dans la direction du segment BA mais en maintenant la distance entre la nouvelle position de A et la nouvelle position de B. Dans la figure b, ce mouvement est illustré en indiquant les nouveaux points comme A' et B'. De plus,

sur cette figure, le déplacement du point A est assez grand et marqué comme une étape pour illustrer comment calculer le point B '.
Le point A' est défini comme le point de la trajectoire correspondant à un déplacement d'un pas sur l'axe des x, c'est-à-dire:

$$A' = (xA + pas, traj(xA + pas))$$

Avec le centre au point A', une circonférence est dessinée en pointillé sur la figure b du rayon égal à la longueur de la bicyclette, Longb. Alors le point B' sera l'intersection entre le segment BA et le cercle en pointillé.
[...]

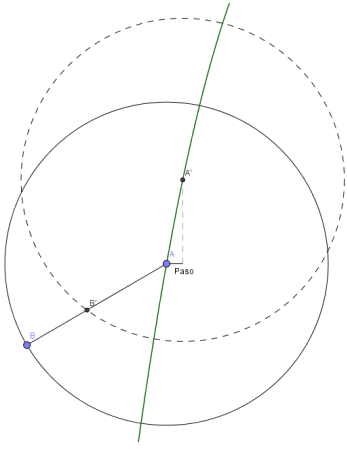


Figure b. Rapprocher le mouvement du point B lorsque le point A se déplace

Le point B 'approchera mieux le mouvement de la roue arrière du vélo si le pas est petit. Si cette variable prend une valeur "très grande", il est possible que le cercle en pointillé n'intercepte pas le segment BA
[...]

C'est en fait le début de la résolution du problème, mais qui ne prend en compte que l'une des contraintes: la distance constante entre les points de contact, avec le sol, des deux roues. La contrainte des tangentes n'est pas vue: elle aurait supposé de penser la construction à partir de la roue arrière, et pas de la roue avant, ce que les discussions dans le séminaire vont faire ressortir ultérieurement, en s'appuyant aussi sur les apports des ressources glanées sur Internet.

5.3 La contribution de l'Internet

Une seconde différence notable entre les explorations mathématiques de 2005 et celles de 2017 est la contribution d'autres ressources que celles proposées par le problème propre, en particulier de ressources Internet.

La première ressource a été proposée par Luis Moreno, directeur du département de mathématiques éducatives du CINVESTAV, signalant que le problème avait été aussi étudié par Tom Apostol et Mamikon Mnatsakanian dans leur ouvrage (2012) sur les *Nouveaux horizons géométriques*, produisant par la même occasion une photo où l'on voit Mamikon Mnatsakanian lui-même, sur un vélo, laissant les fameuses traces sur le sable (Figure 10).

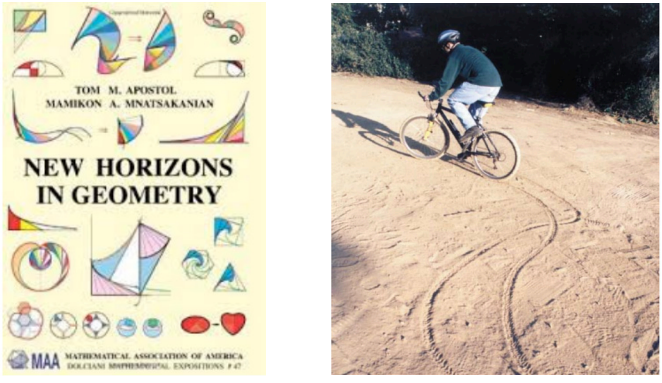


Figure 10. L'organisation de la réflexion lors du séminaire du 24 avril 2017

C'est en fait une dialectique entre 'construction de solutions' d'une part, et 'recherche de solutions toutes faites' qui se développe. Ainsi, la construction d'une solution à partir de GeoGebra est soutenue par une recherche de simulation des traces d'une bicyclette sur le sable, que l'on va trouver à cette adresse http://www.thedudeminds.net/?p=5636 (Figure 11)

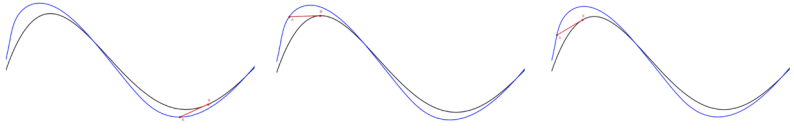


Figure 11. Une simulation de la trajectoire de la bicyclette et des traces des roues http://www.thedudeminds.net/?p=5636

L'exploitation de GeoGebra posait en fait deux questions: comment obtenir des représentations graphiques des traces des roues de bicyclette (aspect géométrique); comment obtenir les équations des courbes correspondantes (aspect algébrique)? L'exploitation d'Internet permet d'obtenir des réponses, aussi pour la deuxième question (Figure 12). Obtenir ces réponses suppose de bien formuler les questions, en utilisant des mots clés qui s'accumulent au fur et à mesure que l'on entre dans le problème (bicycle tracks, Sherlock Holmes, Apostol...), en jouant aussi sur plusieurs langues (formuler les requêtes Internet en Anglais, en Français, en Espagnol...).

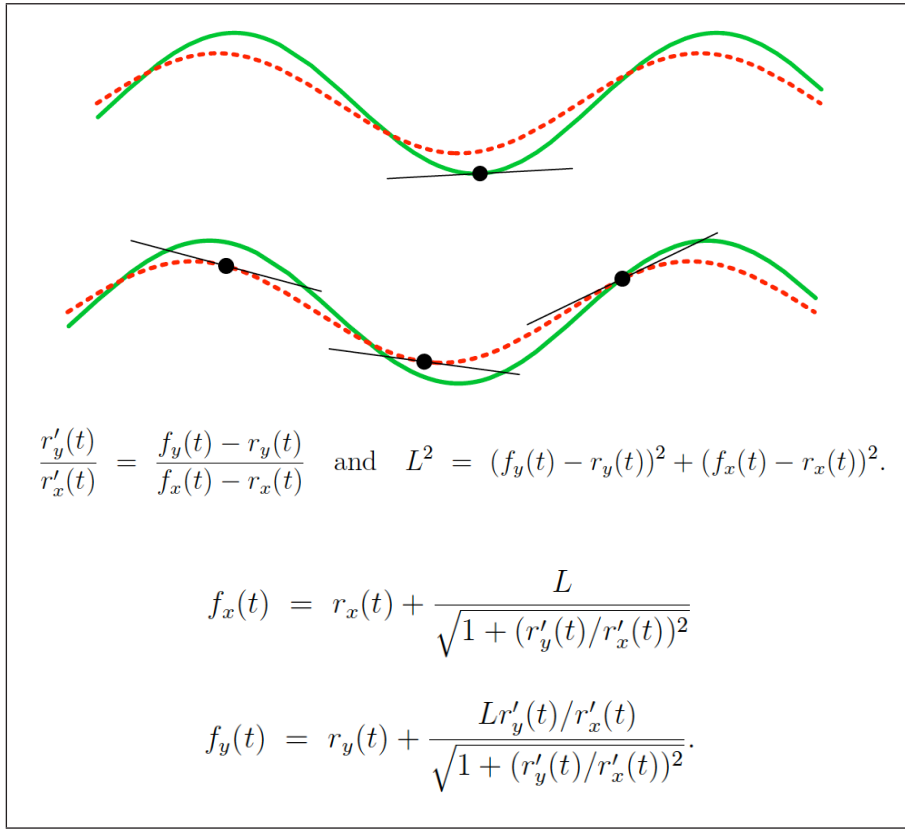


Figure 12. Des propriétés géométriques des courbes aux coordonnées de leurs points (http://www.math.ucsd.edu/~ebender/87/bicycle.pdf

Il y a ainsi, en 2017, une dynamique de la résolution très différente de celle de 2005, et cette métamorphose est liée, profondément, au développement d'Internet: en 2005, on aborde la résolution d'un problème en mobilisant son propre système de ressources, et en jouant sur la synergie entre son propre système de ressources et ceux de ses collègues, dans la dynamique de la coopération (par exemple au sein de dispositifs de formation); en 2017, on aborde la résolution d'un problème en étendant son système de ressources, par intégration, comme pour un puzzle, de pièces successives qui permettent d'éclairer les questions posées. On doit alors considérer le système de ressources des étudiants, et des professeurs, comme des systèmes dynamiques ouverts, dont la (re)construction continue pose des questions théoriques complexes.

6. DISCUSSION

Je voudrais conclure cet article en revenant sur la notion de genèses identitaires et de trajectoires, évoquées en introduction – et tout au long de cet article. Les conditions du travail des professeurs de mathématiques, et des chercheurs du domaine, ont été profondément modifiées ces dernières années, dues principalement à la numérisation des supports de l'information et de la communication. A cette étape, je vois trois questions principales, qui affleurent dans cet article, et mon expérience de ces dernières années, en France, au Brésil, en Chine, au Mexique, ou encore au Sénégal, m'a montré que ces questions sont largement partagées.

- comment combiner avec profit les ressources digitales et les ressources tangibles (par exemples: pour soutenir les interactions, de simples grandes feuilles de papier accrochées au mur vs. des espaces virtuels en ligne; pour simuler les traces de la bicyclette dans le sable, une clé USB... ou une bicyclette vs. une simulation en ligne);
- comment stimuler la créativité mathématique dans des groupes d'étudiants et de professeurs? L'exemple de la collaboration de Tom Apostol (analytic number theorist) and Mamikon Mnatsakanian (visual calculus developper) est intéressant, comme productive crossing of two very different trajectories... Le projet européen MC2 (Mathematics squared creativity) a analysé les rapports profonds entre créativité sociale et créativité mathématique, à étudier de près!

– comment combiner l'apport de nouvelles connaissances aux étudiants (et aux enseignants) et le soutien à leur activité propre? Je suis engagé actuellement dans un projet de recherche en France, PREMaTT (Penser les ressources des enseignants dans un temps de transition), qui repose sur un réseau d'établissements scolaires, pensé comme autant de 'petites fabriques'. Ce sont les enseignants eux-mêmes qui proposent, échangent, testent, des problèmes et des orchestrations, et les chercheurs jouent un rôle d'accompagnateurs. Un projet prometteur...

Cela rend, de mon point de vue, particulièrement critique le développement de cadres théoriques qui placent au centre de leur réflexion les interactions des professeurs avec les ressources de leur enseignement, comme l'approche documentaire du didactique. Une conférence internationale s'est tenue en France, en 2018, pour penser les programmes de recherches nécessaires à développer (https://resources-2018.sciencesconf.org/), et un ouvrage rassemblera ces propositions (Trouche, Gueudet, & Pepin, to be published).

Finalement, je voudrais remercier la revue *Educación Matemática* et Ana Isabel Sacristan pour leur invitation à publier un article, et présenter à la revue, à l'occasion de son 30ème anniversaire, tous mes vœux de succès au service des professeurs, des élèves, et de la connaissance.

7. RÉFÉRENCES

Adler, J. (2012). Knowledge resources in and for school mathematics teaching. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (eds.), *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp.3-22). NY: Springer

Apostol, T., & Mnatsakanian, M. (2012). *New horizons in geometry.* MAA

Assis, C., Gitirana, V., & Trouche, L. (2018). The Metamorphosis of resource systems of prospective teacher: from studying to teaching. In V. Gitirana, T. Miyakawa, M. Rafalska, S. Soury-Lavergne, & L. Trouche (Eds.), *Proceedings of the Re(s)sources 2018 International Conference* (pp. 39-42). ENS de Lyon

Bender, E.A. (2004). *Sherlock Holmes and the bicycle tracks* http://www.math.ucsd.edu/~e-bender/87/bicycle.pdf

Conway, J., Doyle, P., Gilman, J., & Thurston, B. (2006). *Geometry and the imagination* (https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/gi/gi.pdf)

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor. In K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, Vol.2, Cases and perspectives* (pp. 363-392), Charlotte, NC: Information Age.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 213-234.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique,* 2(3), 7-33

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009a). Conceptions et usages de ressources pour et par les professeurs, développement associatif et développement professionnel, *Les dossiers de l'ingénierie éducative,* 65, 76-80.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009b). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 199-218

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (Eds.) (2012). *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development.* New York: Springer.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2012). Teachers' work with resources: documentation geneses and professional geneses. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (eds.), *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. 23-41). NY: Springer

Gueudet, G., & Trouche, L. (2016). Do Trabalho documental dos professores: gênesis, coletivos, comunidade. O caso da matemática. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana, 6*(3), https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2243/1815

Guin, D., Joab, M., & Trouche, L. (Eds.) (2008). *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM (2000-2006),* CDRom, INRP et IREM, Université Montpellier 2, disponible à http://www.math.univ-montp2.fr/sfodem/

Guin, D., & Trouche, L. (1998). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators, *The International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*(3), 195-227

Guin, D., & Trouche, L. (dir.) (2002). *Calculatrices symboliques. Faire d'un outil un instrument du travail mathématique: un problème didactique*, Editions La Pensée sauvage, Grenoble.

Guin, D., & Trouche, L. (2005). Distance training, a key mode to support teachers in the integration of ICT? In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth European Conference on Research on Mathematics Education* (pp. 1020-1029). FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull, disponible à http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/index.php

Hammoud, R. (2012) *Le travail collectif des professeurs en chimie comme levier pour la mise en œuvre de démarches d'investigation et le développement des connaissances professionnelles. Contribution au développement de l'approche documentaire du didactique*. PhD, Université Lyon 1, accessible à https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00762964

Hoyles, C., Kalas, I., Trouche, L., Hivon, L., Noss, R., & Wilensky, U. (2010). Connectivity and Virtual Networks for Learning. In C. Hoyles, & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematical Education and Digital Technologies: Rethinking the terrain* (pp. 439-462). New York: Springer

Monaghan, J., Trouche, L., & Borwein, J. (2016). *Tools and Mathematics: Instruments for Learning*, New York, Springer

MC2 (2017). Mathematical creativity squared, FP7 project http://www.mc2-project.eu/

Pastré, P. (2005). Genèse et identité. *In P.* Rabardel & P. Pastré (dir.), *Modèles du sujet pour la conception* (pp. 231-260). Toulouse: Octarès.

Pédauque, R. T. (coll.) (2006). *Le document à la lumière du numérique*. Caen: C & F éditions.

Pepin, B., Choppin, J., Ruthven, K., & Sinclair, N. (2017). Digital curriculum resources in mathematics education: foundations for change. *ZDM- Mathematics Education, 49*(5), 645- 661

Pepin, B., Xu, B., Trouche, L., & Wang, C. (2016). Developing a deeper understanding of *mathematics teaching expertise:* Chinese mathematics teachers' resource systems as windows into their work and expertise. *Educational studies in Mathematics, 94*(3), 257–274, http://rdcu.be/koXk

PREMaTT (2018). http://ife.ens-lyon.fr/ife/recherche/groupes-de-travail/prematt

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Rabardel, P., & Bourmaud, G. (2005). Instruments et systèmes d'instruments. In P. Rabardel & P. Pastré (dir.), *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement* (pp. 211-229). Toulouse : Octarès

Remillard, J.T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research, 75*(2), 211-246.

Rocha, M. K., & Trouche, L. (2016). Da produção coletiva de livros didáticos digitais aos usos feitos professores de Matemática: o caso do grupo francês Sésamath. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana, 6*(3)

Salinas-Hernández, U., Sacristán, A. I., & Trouche, L. (2018). Technology integration into mathematics classrooms: case study of a highschool teacher's use of GeoGebra. In V. Gitirana, T. Miyakawa, M. Rafalska, S. Soury-Lavergne, & L. Trouche (Eds.), *Proceedings of the Re(s)sources 2018 International Conference* (pp. 88-91). ENS de Lyon

Sanchez, M. (2010). Orquestación documentacional: herramienta para la estructuración y el análisis del trabajo documentacional colectivo en línea, *Recherches en didactique des mathématiques*, 30(3), 370-394.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9,* 281-307.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 137-162). N.Y.: Springer

Trouche, L. (2009). Penser la gestion didactique des artefacts pour faire et faire faire des mathématiques: histoire d'un cheminement intellectuel, *L'Educateur, 3,* 35-38.

Trouche, L. (2018a). *Understanding teachers' work throughout their interactions with resources.* Invited lecture for the Freudenthal Institute, Utrecht University, April 19th.

Trouche, L. (2018b). Instrumentation in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* N.Y.: Springer. doi:10.1007/978-3-319-77487-9_80-3

Trouche, L. (2018c). Instrumentalization in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* N.Y.: Springer. doi:10.1007/978-3-319-77487-9_100013-1

Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G., & Sacristan, A. I. (2013). Technology-Driven Developments and Policy Implications for Mathematics Education. In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 753-790). Springer.

Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (2018). Documentational approach to didactics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* N.Y.: Springer. doi:10.1007/978-3-319-77487-9_100011-1

Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (Eds.) (to be published). *Resources in Mathematics Teachers' Professional Activity.* Springer series Advances in Mathematics Education

Trouche, L., Trgalova, J., Loisy, C., & Alturkmani, M. (2018). *Ressources vivantes pour l'enseignement et l'apprentissage. Contribution des composantes IFÉ et S2HEP de l'ANR ReVEA.* ENS de Lyon, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01743212

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: a example from a longitudinal trajectory on percentage, *Educational Studies in Mathematics,* 54, 9-35

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development, 52,* 83-94.

Wang, C., Trouche, L., & Pepin, B. (2018). An investigation of Chinese mathematics teachers' resources work and their professional development in collectives, In G. Schubring, L. Fan, & V. Giraldo (Eds.). *Proceeding of the second International Conference on Mathematics Textbooks, Research and Development.* Rio, 8-11 May 2017.